[21-BA 328/21-BS 332]

AT THE END OF THIRD SEMESTER (CBCS PATTERN)

MATHEMATICS – III – ABSTRACT ALGEBRA

(COMMON FOR B.A., B.Sc.)

UG PROGRAM (4 YEARS HONORS)

(w.e.f. Admitted Batch of 2020-21)

Time: 3 Hours | Max. Marks: 75

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE of the following questions.

1. In a group G, prove that $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
   G ఒక సమూహం అనుకోండి. $a, b \in G$ కు $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ అని నిరూపించండి.

2. Define a subgroup. Give an example.
   ఉపసమూహమును నిర్వచించి, ఒక ఉదాహరణనిమ్ము.

3. Prove that subgroup of an abelian group is normal.
   వినిమయ సమూహం యొక్క ఉపసమూహము అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపండి.

4. If for a group G, Let $f : G \to G$ is given by $f(x) = x^2$, $\forall x \in G$ is a homomorphism, prove that G is abelian.
   సమూహం G లో $f : G \to G$ ప్రమేయం $f(x) = x^2$, $\forall x \in G$ అని నిర్వచింపబడే ప్రమేయం సమరూపత అయితే G వినిమయము అని చూపండి.

5. Prove that a field has no zero divisor.
   క్షేత్రానికి శూన్య భాజకాలు ఉండవని చూపండి.

6. If H is a subgroup of a group G then show that $H^{-1} = H$.
   సమూహం G లో H ఉపసమూహం అయితే $H^{-1} = H$ అని చూపుము.

7. Prove that every finite integral domain is a field.
   పరిమితపూర్ణాంక ప్రదేశము ఒక క్షేత్రము అని చూపుము.

8. Prove that a homomorphism f of a group G on to a group G' with kernel K is an isomorphism if and only if $K = \{e\}$
   సమూహము నుండి G' కి కెర్నల్ K గా గల సంగ్రస్త సమరూపత f, తుల్య రూపత అగుటకు $K = \{e\}$ కావడము ఆవశ్యక పర్యాప్తకమని చూపండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL the questions.

9. (a) Find the order of each element of the group $G=\{0,1,2,3,4,5\}$ under addition modulo 6.

$G=\{0,1,2,3,4,5\}$ సమితి $+_6$ దృష్ట్యా సమూహములోని ప్రతి మూలకపు తరగతిని కనుక్కోండి.

Or

(b) Let G be a group and $a \in G$ such that $0(a)=n$. Then prove that $e^m = e \Leftrightarrow m/n$.

సమూహము G లో a మూలకానికి $0(a)=n$ అయితే $e^m = e \Leftrightarrow m/n$ అని చూపుము.

10. (a) Show that a non-empty complex H of a group G is a subgroup of G if and only if $ab^{-1} \in H$, $\forall a,b \in H$

H అనునది సమూహము G యొక్క శూన్యేతర సమితి H, G కి ఉపసమూహము కావలెననగా ఆవశ్యకము మరియు పర్యాప్తము $ab^{-1} \in H$, $\forall a,b \in H$

Or

(b) State and prove the Lagrange's theorem for finite groups.

పరిమిత సమూహాలకు లెగ్రాంజి సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించండి.

11. (a) A subgroup H of group G is normal subgroup of G iff each left coset of H in G is a right coset of H in G, prove necessary and sufficient conditions.

G అను సమూహములో H అను ఉపసమూహము అభిలంబ ఉపసమూహం కావడానికి G లోని H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహ సమితి, G లోని H యొక్క కుడి సహ సమితి అవుతుంది అనునది ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

Or

(b) Prove that intersection of two normal subgroups of a group G is also normal subgroup of G.

సమూహము G యొక్క రెండు అభిలంబ ఉపసమూహాలచ్ఛేదనము, అభిలంబ ఉపసమూహము అవుతుందని చూపండి.

12. (a) Prove that every homomorphic image of a group is a group.

సమూహము యొక్క సమరూపత ప్రతిబింబం సమూహం అవుతుందని నిరూపించండి.

Or

(b) State and prove Cayley's theorem.

కేయిలి సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

13. (a) Prove that characteristic of an integral domain is either zero or prime number.

పూర్ణాంక ప్రదేశం యొక్క లాక్షణికత శూన్యం లేదా ప్రధాన సంఖ్య అవుతుందని చూపండి.

Or

(b) Prove that $G = \left\{ a + b\sqrt{2} / a, b \in Q \right\}$ is a field.

$G = \left\{ a + b\sqrt{2} / a, b \in Q \right\}$ అనునది క్షేత్రము అవుతుందని చూపండి.