IV

[21-BA 428-B/21-BS 432-B]

AT THE END OF FOURTH SEMESTER (CBCS PATTERN)

MATHEMATICS – IV(B) – LINEAR ALGEBRA

(COMMON FOR B.A., B.Sc.)

UG PROGRAM (4 YEARS HONORS)

(w.e.f. Admitted Batch 2020-21)

Time: 3 Hours | Max. Marks: 75

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 5 marks.

1. Show that the vector $\alpha = (2,-5,3)$ in $V_3(R)$ can not be expressed as a linear combination of the vectors $e_1 = (1,-3,2)$, $e_2 = (2,-4,-1)$ and $e_3 = (1,-5,7)$.

   $V_3(R)$ లోని $\alpha = (2,-5,3)$ అనే సదిశను $e_1 = (1,-3,2)$, $e_2 = (2,-4,-1)$ మరియు $e_3 = (1,-5,7)$ అనే సదిశల యొక్క బుజా సంయోగముగా వ్రాయలేము అని చూపండి.

2. If α, β, γ are linearly independent vectors in $V(R)$ then show that $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ are also linearly independent.

   $V(R)$ లో α, β, γ లు బుజా స్వాతంత్ర్యాలైతే $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ లు కూడా బుజా స్వాతంత్ర్యాలని చూపండి.

3. Show that the mapping $T : V_3(R) \to V_2(R)$ defined as $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, a_1 - a_3)$ is a linear transformation.

   $T : V_3(R) \to V_2(R)$ అనే ప్రమేయాన్ని $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, a_1 - a_3)$గా నిర్వచిస్తే T ని బుజాపరివర్తనమని చూపుము.

4. Prove that $U(F)$ and $V(F)$ be two vector spaces and $T : U \to V$ is a linear transformations. then the Null space $N(T)$ is a subspace of $V(F)$.

   $U(F)$ మరియు $V(F)$ లు రెండు సదిశాంతరాళములు మరియు $T : U \to V$ బుజాపరివర్తనమ్మైతే, $V(F)$ కి శూన్యాంతరాళం $N(T)$ ఉపాంతరాళమని చూపండి.

2023

5. Show that $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$ is a basis for $M_{2\times 2}(R)$

$\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$ అనేది $M_{2\times 2}(R)$ కి ఆధారంను ఏర్పరుస్తుందని చూపండి.

6. Find the coordinates of $(2i, 3+4i, 5i)$ w.r. to the basis $S = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ of $c^3(c)$.

$c^3(c)$ కి $S = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ ఆధారమైతే $(2i, 3+4i, 5i)$ కు నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

7. State and prove parallelogram law in inner product space.

అంతర్లబ్దాలలో సమలంబ చతుర్భుజ నియమాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

8. Show that the system of equations $x - 4y + 7z = 14$; $3x + 8y - 2z = 13$; $7x - 8y + 26z = 5$ are inconsistent.

$x - 4y + 7z = 14$; $3x + 8y - 2z = 13$; $7x - 8y + 26z = 5$ సమీకరణాలు పొంతన నియమాన్ని పాటించవని చూపండి.

SECTION B — ($5 \times 10 = 50$ marks)

Answer ALL the questions.

Each question carries 10 marks.

9. (a) Let $V(F)$ be a vector space and let $W \subseteq V$. Prove that the necessary and sufficient condition for W to be a subspace of V are

(i) $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(ii) $a \in f, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

$V(F)$ సదిశాంతరము మరియు $W \subseteq V$ అనుకొనుము. V కి W ఉపాంతరాళము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమాలు.

(i) $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(ii) $a \in f, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$ అని నిరూపించండి.

Or

2023

(b) Prove that the union of two subspaces of a vector space is a subspace if and only if one is contained in the other.

సదిశాంతరాళం యొక్క రెండు ఉపాంతరాళాల సమ్మేళనం ఉపాంతరాళం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము ఒకటి యింకొక దానిని కలిగి వుండునని నిరూపించండి.

10. (a) Let $V(F)$ be a finite dimensional vector space. Prove that any two basis of V have the same number of elements.

$V(F)$ పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళము అయితే V యొక్క ఏ రెండు ఆధారాల్లో అయినా సదిశల సంఖ్య సమానమని నిరూపించండి.

Or

(b) If w_1 and w_2 are two sub- spaces of finite dimensional vector space $V(F)$, then show that $\dim(w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim(w_1 \cap w_2)$.

పరిమిత సదిశాంతరాళం $V(F)$ లో w_1 మరియు w_2 లు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయితే $\dim(w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim(w_1 \cap w_2)$ అని నిరూపించండి.

11. (a) State and prove Rank-Nullity theorem.

కోటి- శూన్యత సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Let $T : V_3(R) \to V_3(R)$ be defined by $T(a, b, c) \equiv (3a, a - b, 2a + b + c)$ then prove that $(T^2 - I)(T - 3I) = \bar{0}$.

$T : V_3(R) \to V_3(R)$ ని $T(a, b, c) \equiv (3a, a - b, 2a + b + c)$గా నిర్వచించిన $(T^2 - I)(T - 3I) = \bar{0}$ అని నిరూపించండి.